

Enseigner et apprendre la démonstration en mathématique : perceptions et vécu dans l’enseignement supérieur aux Antilles

Mickaëlle RAMASSAMY,

CRREF, Université des Antilles, mickaëlle.ramassamy@univ-antilles.fr

Antoine DELCROIX,

CRREF, Université des Antilles, antoine.delcroix@univ-antilles.fr

Maurizio ALÌ,

CRREF, Université des Antilles, maurizio.ali@inspe-martinique.fr

Résumé

Dans le système éducatif français, la démonstration n’apparaît pas en classe de mathématique comme un objet d’enseignement au sens de Chevallard (1985). En effet, du fait de sa mention transversale dans les programmes de l’enseignement secondaire et de la demande de progressivité dans son apprentissage, elle revêt plutôt le statut d’objet de connaissance. Ce constat est renforcé par son absence dans les textes institutionnels régissant l’enseignement des mathématiques en Classes Préparatoires Scientifiques aux Grandes Écoles et dans les blocs de compétences des fiches du Répertoire National des Compétences Professionnelles sur lesquelles s’appuient les maquettes de licence de mathématique.

Si la démonstration n’est pas nommée dans les objectifs d’apprentissage de ces cursus post secondaire, elle y est pour autant régulièrement fréquentée au cours des enseignements sous diverses formes. Parmi les pratiques courantes, nous pouvons noter l’exposition par l’enseignant ou la pratique guidée ou autonome par l’étudiant au cours de la résolution d’exercices dont la finalité peut être ou non de prouver un résultat. La pluralité des milieux (Sensevy, 2011) pouvant être mis en jeu dans cet apprentissage nous amène à considérer à la fois l’action de l’enseignant et celle de l’étudiant dans l’acquisition de la démonstration en mathématique. Les interrogations orales en Classes Préparatoires aux Grandes Écoles constituent un exemple de situation adidactique, au sens de Brousseau (1998), au cours de

laquelle l'étudiant est amené à construire une démonstration pour valider un résultat proposé ou une conjecture qu'il a émise (Lalaude-Labayle, 2016).

Nous sommes amenés à penser que, dans le cadre de situations d'interactions professeur-étudiant, les conceptions de l'enseignant sur la démonstration influencent l'apprentissage de leurs étudiants, ses perceptions quant à sa capacité à démontrer et la signification qu'ils attribuent au vocabulaire mis en jeu dans l'action de prouver.

L'étude présentée ici a pour objectif de décrire les conceptions d'étudiants inscrits aux Antilles à l'université ou en Classes Préparatoires aux Grandes Écoles scientifiques sur la démonstration et les perceptions d'enseignants intervenant dans leur cursus. Les conceptions des étudiants sont recueillies à deux étapes, au début de chacune de leurs deux premières années dans l'enseignement supérieur, lors d'enquêtes par questionnaire au cours desquelles nous étudions leur ressenti sur leur capacité à prouver et sur le sens donné aux termes environnant la démonstration. Pour le versant enseignants, nous menons des entretiens semi-directifs, portant également sur la sémantique et sur leur conception de la démonstration et de son enseignement. Les premiers résultats montrent une pluralité des perceptions des enseignants et des étudiants relativement à certains concepts relatifs à la démonstration, mais également une corrélation entre les perceptions des enseignants et l'évolution de celles des étudiants au cours du cursus.

Abstract

In the French education system, proof does not appear in mathematics class as an object of teaching in the sense of Chevallard (1985). Indeed, because of its transversal mention in secondary education programs and the demand for progressivity in its learning, it rather takes on the status of an object of knowledge. This observation is reinforced by its absence in the institutional texts concerning mathematics in Scientific Preparatory Classes for Grandes Écoles and in the skill blocks of the files of the National Directory of Professional Skills on which teaching in the bachelor's degree in mathematics is based.

While the proof is not named in the learning objectives of these post-secondary courses, it is nonetheless regularly used during lessons in various forms. Among the common practices, we can note the exposure by the teacher or the guided or autonomous practice by the student during the resolution of exercises whose purpose may or may not be to prove a result. The plurality of environments (Sensevy, 2011) that can be brought into play in this learning leads us to consider both the actions of the teacher and that of the student in the acquisition of proof in mathematics.

The oral examinations in Preparatory Classes for the Grandes Écoles constitute an example of an adidactic situation, in the sense of Brousseau (1998), during which the student is required to construct a proof to validate a proposed result or a conjecture that he has formulated (Lalaude-Labayle, 2016).

We are led to think that, in the context of teacher-student interaction situations, the teacher's conceptions of proof influence their students' learning, their perceptions of their ability to demonstrate and the meaning they attribute to the vocabulary involved in the action of proving.

The study presented here aims to describe the views of French West Indies university students or in Preparatory Classes for Scientific Grandes Ecoles on the demonstration and perceptions of teachers involved in their course. Students' views are collected at two stages, at the start of each of their first two years in higher education, during questionnaire surveys during which we study their feelings about their ability to prove and the meaning given to the terms surrounding the demonstration. For the teaching side, we conduct semi-structured interviews, also focusing on semantics and their conception of the proof and its teaching. The first results show a plurality of perceptions of teachers and students relative to certain concepts relating to the proof, but also a correlation between the perceptions of teachers and the evolution of those of students during the course.

Mots-clés

AE dans le champ de la pratique d'enseignement, AE dans le champ de l'apprentissage étudiant, enseignement supérieur, pédagogie universitaire

1. Introduction

Dans l'enseignement des mathématiques en France, la place accordée à la démonstration a varié en fonction des réformes successives. Le cas particulier de l'enseignement supérieur interpelle par l'absence de mention de cet élément dans les textes guidant les enseignements. Il n'est donc pas imposé qu'elle fasse l'objet d'un enseignement spécifique, mais elle est régulièrement fréquentée dans les activités pédagogiques. En ce sens, l'action didactique conjointe de l'enseignant et de l'étudiant participe de façon active à l'acquisition des compétences la concernant. Cette absence de cadrage institutionnel permet à l'enseignant de définir les contours de son enseignement concernant la démonstration. Il est alors légitime de s'interroger sur la manière dont ses propres perceptions influencent la construction de cet enseignement. Plus précisément, nous nous proposons dans cette étude d'étudier l'impact des perceptions des enseignants concernant la démonstration et les concepts l'environnant sur les perceptions qu'ont les étudiants de ces mêmes termes et de leur capacité à démontrer.

2. Cadre théorique et problématique de la recherche

La démonstration est un élément fréquemment questionné par la recherche, sous divers axes tels que le sens du terme et de ceux qui l'environnent ou sa fonction dans l'enseignement et l'activité mathématique. Dans le cadre de l'enseignement, nous pouvons remarquer que la démonstration n'est pas à proprement parlé un objet d'enseignement mais s'apparente à un objet de connaissance (Chevallard, 1985). Apprendre à démontrer étant considéré comme une compétence transversale de l'enseignement supérieur, nous sommes conduits à considérer son apprentissage dans le cadre du jeu didactique lors des activités de classe. L'action conjointe enseignant-étudiant dans la construction de la démonstration d'un résultat peut être observée par le prisme de la mésogénèse, de la chronogénèse et de la topogénèse, où nous pouvons observer la part de chacun des acteurs (Sensevy, 2011). Une analyse praxéologique de situations rencontrées dans l'enseignement des mathématiques nous conduit à considérer la démonstration comme un type de tâche pour lequel l'enseignant possède des attendus liés, non seulement à des préconisations institutionnelles, mais aussi à ses connaissances et ses perceptions. La démonstration est également une technologie permettant de justifier une technique utilisée pour résoudre un type de tâche. Démontrer peut donc prendre différentes formes dans l'activité mathématique dans le cadre éducatif. Cette présence plurielle, ainsi que l'analyse épistémologique de la démonstration qui révèle une complexité sémantique, fonctionnelle,

structurelle et cognitive, peuvent éclairer sur les difficultés vécues par enseignants et étudiants dans cet apprentissage.

Les Classes Préparatoires scientifiques aux Grandes Écoles fournissent un exemple d'institution où la démonstration est fréquentée dans différentes situations (Lalaude-Labayle, 2016). Les mathématiques qui y sont enseignées sont précisées dans des programmes qui ne font pas mention explicite d'un enseignement de la démonstration. Pourtant, les sujets de concours d'entrée aux différentes Grandes Ecoles, auxquels préparent ces classes, demandent de démontrer des résultats. Nous pouvons donc comprendre qu'il s'agit d'un attendu à l'issue des deux années préparatoires. En particulier, les interrogations orales fournissent un cadre dans lequel l'étudiant est mis en situation adidactique de validation d'un résultat (Brousseau, 1998). Les interactions avec l'enseignant l'amènent au résultat attendu. À travers ses interactions, le jeu didactique évolue, le milieu étant modifié par l'ajout de données par l'enseignant ou par l'action de l'étudiant. Ces évolutions successives permettent de faire émerger la démonstration attendue et contribuent ainsi à l'acquisition de la compétence démontrer.

Il en est de même en premier cycle universitaire où les maquettes de licence de mathématiques, sont, en principe, construites en s'appuyant sur les blocs de compétences des fiches du Répertoire National des Compétences Professionnelles¹ qui ne mentionnent pas la démonstration pour la licence de mathématiques. Cependant, les sujets des concours d'enseignement du second degré, qui figurent dans les débouchés usuels de ces licences, comportent souvent des démonstrations de résultats classiques ou plus proches de la recherche actuelle.

Nous pouvons donc questionner l'impact de l'action didactique conjointe de l'enseignant et de l'étudiant sur l'apprentissage de la démonstration, dans ce contexte d'enseignement moins normalisé par des textes institutionnels que ne l'est l'enseignement secondaire. Plus précisément, nous cherchons à mesurer l'impact des perceptions des enseignants vis-à-vis de la démonstration sur celles des étudiants et sur leur capacité à en construire. Nous émettons l'hypothèse que les perceptions des enseignants sur la démonstration, ainsi que leurs attentes la concernant, modèlent celles des étudiants et influencent les conceptions de ces derniers sur leur capacité à démontrer.

¹ Voir <https://www.francecompetences.fr/recherche/mcp/24518/#ancree3> pour la licence de mathématiques, site consulté le 05 novembre 2021.

3. Méthodologie

Pour recueillir les perceptions des enseignants intervenant en Classes Préparatoires aux Grandes Écoles Scientifiques et en licence de mathématiques en Martinique relativement à la démonstration et aux concepts qui l'entourent, nous avons mené des entretiens semi-directifs. Une grille d'entretien a été réalisée suivant deux axes : le sens du vocabulaire lié à la démonstration et les perceptions vis-à-vis des difficultés des étudiants.

Dans le cadre d'une étude longitudinale, nous avons également mené des enquêtes par questionnaire auprès d'étudiants inscrits dans ces mêmes filières. Leurs perceptions vis-à-vis de la démonstration et leur capacité à démontrer ont été questionnées en deux temps, au début de leur première année dans l'enseignement supérieur puis au début de la deuxième année, selon les mêmes axes d'analyse que pour les enseignants.

Concernant le sens du vocabulaire associé à la démonstration, une analyse catégorielle des réponses des enseignants a été effectuée et mise en relation avec une analyse catégorielle des réponses des étudiants. Nous avons également analysé conjointement les perceptions des enseignants sur les difficultés de leurs étudiants et les difficultés perçues par ceux-ci.

4. Synthèse des résultats et discussion

4.1. Perceptions des enseignants

En l'état actuel de nos investigations, quatre enseignants ont accepté de répondre à cet entretien : trois enseignants de Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles et un enseignant-chercheur en licence de mathématiques.

Nous avons questionné les enseignants sur la signification qu'ils donnent aux mots hypothèse, démonstration, justification et conjecture. Pour ces enseignants, une hypothèse est une proposition qui est soit considérée comme avérée, désignant ce dont on dispose, soit une proposition à démontrer. La démonstration est perçue de façon différente, allant de l'amélioration de la compréhension du résultat à démontrer et des outils utilisés pour le démontrer à un objet destiné à convaincre autrui sur la validité d'une démarche en suivant un processus. De manière unanime, la justification est rapprochée de l'explication, permettant de donner les raisons de la validité d'un résultat à l'aide de faits établis. La conjecture est considérée comme une proposition obtenue à l'aide de moyens empiriques qu'il s'agit de démontrer.

Ces enseignants interrogés perçoivent de façon différente les difficultés des étudiants sur la démonstration. Pour l'un, elles résident dans une acquisition non achevée des capacités d'abstraction, alors que d'autres soulignent le manque de connaissances mobilisables, de culture mathématique pour parvenir à trouver les arguments et justifier les liens établis entre les propositions. Une confusion courante entre hypothèse et conclusion dans un schéma déductif a été énoncée comme cause fréquente des difficultés lors de la démonstration d'un résultat, tout comme la production d'une rédaction conforme à la norme scolaire, citée de façon unanime.

4.2. Perceptions des étudiants

Soixante-et-un étudiants ont répondu aux deux étapes de ce questionnaire, dont 26 inscrits en Classes Préparatoires Scientifiques et 35 en licence de mathématiques.

Sur le sens du vocabulaire associé à la démonstration, des différences limitées ont été notées entre les réponses du début de première année et celles du début de deuxième année sur la signification du mot hypothèse. Pour la majorité de ces étudiants, l'hypothèse se rapproche de la supposition ou de la conjecture. Pour quelques autres, il s'agit du point de départ d'une démonstration ou de la résolution d'un problème.

En revanche, le sens du mot démonstration semble se préciser entre la première année et la deuxième année du cursus, passant d'éléments variés portant sur la nécessité de formalisme, l'objectif de validation, la preuve ou l'explication d'un résultat à une signification plus partagée à savoir la validation d'un résultat en intégrant la notion de processus. Si, en première année, la justification est majoritairement rapprochée de la recherche d'arguments, elle tend plus, en deuxième année, à se rapprocher de la preuve.

La conjecture, qui était exclusivement assimilée en première année à une supposition ou une hypothèse, devient en deuxième année pour quelques-uns une propriété qui n'est pas démontrée. Cependant, les premières perceptions se maintiennent pour un grand nombre d'étudiants.

Les étudiants perçoivent leurs difficultés lors de la preuve d'un résultat de façons très diverses. La moitié d'entre eux estiment éprouver des difficultés à trouver les arguments lors de la démonstration d'un résultat. Concernant la rédaction de la démonstration, la moitié d'entre eux estiment avoir peu, voir pas de difficulté en première année. En revanche, on relève une augmentation sensible de ceux estimant être en difficulté ou grande difficulté dans ce domaine en deuxième année.

4.3. Discussion des résultats

La comparaison des perceptions des enseignants et des étudiants nous révèle que ce que déclarent les enseignants sur le vocabulaire concernant la démonstration semble se retrouver dans le changement de perception des étudiants. Ainsi, ces derniers prennent conscience en deuxième année que la démonstration est un processus. Une influence se remarque également sur la signification du mot conjecture, car la dimension d'explication mentionnée par les enseignants se retrouve dans les perceptions des étudiants en deuxième année alors qu'elle ne l'était pas en première année. De même, la nécessité de démontrer une conjecture, soulignée par les enseignants, n'était pas notée par les étudiants en première année, alors qu'elle apparaît dans leurs perceptions ultérieures.

Les difficultés des étudiants concernant la démonstration ne sont pas appréciées de manière identique par eux-mêmes et par leurs enseignants. Si les deux populations s'accordent à énoncer la rédaction comme difficulté, les enseignants sont plus unanimes à mentionner également l'argumentation alors que seulement la moitié des étudiants mentionne ce point.

Les changements de perceptions des étudiants sur le sens des termes liés à la démonstration entre la première et la deuxième année semblent refléter les perceptions de leurs enseignants. Leurs perceptions quant à leurs difficultés, en particulier sur la rédaction où un changement est noté entre les deux enquêtes, semblent devenir plus proches de celles de leurs enseignants. Outre cet effet de mimétisme, nous pensons également que les étudiants, confrontés de manière plus fréquente à l'exercice de rédaction de démonstration en deuxième année, en mesurent mieux la difficulté. Ces différentes corrélations semblent donc montrer que notre hypothèse est vérifiée. Nous restons cependant prudents, car d'autres éléments peuvent influencer les perceptions des étudiants, dont leur maturation progressive au cours du cursus. Nous mentionnons également comme limite le nombre relativement faible d'entretiens avec des enseignants menés à ce jour.

4. Conclusion

L'absence de mention de la démonstration dans les textes encadrant l'enseignement des mathématiques dans les cursus post baccalauréat confère à l'enseignant une certaine liberté sur les approches de cet élément courant de l'activité mathématique. Les interactions enseignant-étudiant jouent donc un rôle crucial dans cet apprentissage. Le jeu didactique semble alors empreint des perceptions de l'enseignant, comme nos constats le montrent. L'évolution des perceptions des étudiants entre leur entrée dans l'enseignement supérieur et la deuxième année

semble effectivement marquée par celles-ci. Ce phénomène se retrouve aussi bien dans les modifications de sens donné à certains concepts environnant la démonstration que dans leurs perceptions de leurs difficultés.

Nous envisageons de poursuivre cette étude dans trois directions. En premier, nous souhaitons interroger un panel plus représentatif d'enseignants impliqués dans ces formations. En second, nous poursuivrons l'étude de l'évolution des perceptions des étudiants par une enquête en fin de deuxième année. Enfin, nous souhaitons pouvoir effectuer des analyses d'activités de classe consacrées à la démonstration, afin d'observer les éléments constitutifs de cette action conjointe enseignant-étudiant qui semblent favoriser cette influence.

Références bibliographiques

Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques*, La pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*, La pensée Sauvage, Grenoble.

Lalaude-Labayle, M. (2016). *L'enseignement de l'algèbre linéaire au niveau universitaire- Analyse didactique et épistémologique*. Ph.D. dissertation, UPPA (LMA-Pau).

Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*, De Boeck.